УДК 330.42

НЕЛОКАЛЬНЫЕ МЕРЫ НЕПРИЯТИЯ РИСКА В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

***В.В. ТАРАСОВА**, магистрант Высшей школы бизнеса, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
e-mail: v.v.tarasova@mail.ru

***В.Е. ТАРАСОВ**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
e-mail: v.e.tarasov@bk.ru

Аннотация

В статье предлагаются меры непринятия риска, позволяющие учитывать нелокальные эффекты при описании отношения потребителей к риску. Эти меры зависят от изменений полезности на конечном интервале изменений величины дохода (объема потребления), а не только в бесконечно малой окрестности рассматриваемой величины. В качестве математического аппарата описания эффектов нелокальности используется теория производных произвольных и нецелых порядков. Стандартные меры непринятия риска являются частными случаями предлагаемых нелокальных мер.

Ключевые слова: *мера непринятия риска, функция полезности, нелокальные характеристики, производные нецелого порядка.*

Для описания поведения потребителя в условиях неопределенности и отношения потребителя к риску используются функции полезности и меры непринятия риска [1, 4]. Приведем определение стандартной меры непринятия риска. Пусть величина дохода потребителя (или объема потребления) равна w, а изменение полезности при изменении дохода описывается функцией $U(w)$. Если функция $U(w)$ является непрерывно дважды дифференцируемой по w, то для описания отношения потребителя к риску используется мера непринятия риска, которая определяется формулой

$$AP_a(w) := -\frac{U^{(2)}(w)}{U^{(1)}(w)}, \qquad (1)$$

где $U^{(n)}(w) = d^n U(w)/dw^n$ – стандартная производная целого порядка n и .

Непринятие риска характеризуется выражением (1), которое содержит только производные целых (первого и второго) порядков. Известно, что производные целых порядков, $U^{(1)}(w)$ и $U^{(2)}(w)$, по доходу w определяются свойствами функции полезности $U(w)$ только в бесконечно малой окрестности рассматриваемой величины дохода. Поэтому стандартная мера (1) задает только локальную характеристику в пространстве всевозможных значений дохода.

Для описания экономических процессов, в которых текущее состояние процесса зависит не только от бесконечно малой окрестности этого состояния, необходимо использовать обобщение понятий и методов экономического анализа. В частности, важно сформулировать обобщение понятия меры непринятия риска так, чтобы оно позволяло учитывать изменение полезности на конечном интервале изменений величины дохода. Для этого необходимо использовать методы, позволяющие учесть все изменения функции полезности на заданном конечном интервале дохода $[w_0, w_1]$, а не только в бесконечно малой окрестности рассматриваемой величины дохода. В качестве w_0 и w_1 могут рассматриваться, например, минимальный и максимальный доход, который потребитель предполагает потратить на приобретение товаров и услуг. В этом случае мы сможем в экономическом анализе исследовать и вычислить нелокальные характеристики экономических процессов, которые позволят более адекватно описывать отношение потребителя к риску.

Определение нелокальной меры непринятия риска

Сформулируем обобщение понятия меры непринятия риска (1), которое учитывает изменение функции полезности $U(w)$ на конечном заданном интервале дохода $[w_0, w_1]$, и, тем самым, является нелокальной характеристикой экономического процесса. При этом новая мера должна быть определена так, чтобы стандартная мера неприятия риска (1) была частным случаем предлагаемой нелокальной меры. Такое обобщение стандартной меры неприятия риска возможно лишь при условии использования математического аппарата, позволяющего описывать нелокальности в пространстве факторов, характеризующих экономический процесс. В качестве такого инструмента можно использовать теорию производных произвольного (дробного) порядка [2, 5, 8, 9, 12], которая включает производные целого порядка, как частный случай. В математике известны различные типы производных нецелого порядка, предложенные Риманом, Лиувиллем, Грюнвальдом, Летниковым, Риссом, Вейлем, Капуто и др. [2, 8]. Мы будем использовать производные Капуто [8, с. 90–99]. Отличительной особенностью этих производных является то, что их действие на постоянную функцию дает ноль. Приведем определение производной Капуто.

Определение 1. Пусть функция *f(x) имеет производные вплоть до (n–1) порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале [a,b]. Тогда производная Капуто порядка* $\alpha \geq 0$ определяется формулой

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{f^{(n)}(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ *– гамма функция, a<x<b, a* $f^{(n)}(x)$ *– производная целого порядка n:=[α]+1 от функции f(x) по переменной x.*

Отметим, что для целых значений α = *n* производная Капуто (2) совпадает [8, с. 92] с обычной производной порядка *n*, т.е. $(D^{n}_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x)$Поэтому производные Капуто включают стандартные производные целых порядков как частный случай. Это позволяет нам определить меры неприятия риска, которые будут включать стандартные меры (1) как частный случай.

Для использования производных нецелого порядка в экономической теории [13, 15–17] необходимо рассмотреть вопрос размерности экономических показателей, индикаторов и мер. Если предполагать, что величина полезности *U(w)* измеряется в ютилях, а доход *w* – в денежных единицах (д.е.$^{-1}$), то стандартная мера неприятия риска (1) будет иметь размерность д.е в минус первой степени (д.е.$^{-1}$), а нелокальная мера – размерность д.е в степени минус *α* (д.е.$^{-\alpha}$). Для того чтобы размерности нелокального обобщения мер неприятия риска имели привычную величину и более простую экономическую интерпретацию, следует сделать величину дохода (объема потребления) безразмерной. Для этого нужно выбрать некоторую величину дохода w_b за базовую (например, в качестве базовой величины дохода может быть выбрана минимальная заработная плата, а для объема потребления – некоторая потребительская корзина), и использовать в формулах безразмерную переменную $W := w/w_b$ вместо переменной *w*. В этом случае абсолютные меры неприятия риска для локального и нелокального случая будут безразмерными величинами. Используя формулу (1), безразмерная мера неприятия риска для локального случая будет определяться формулой

$$AP_a(W) := -\frac{U^{(2)}(W)}{U^{(1)}(W)}, \quad (3)$$

где $U^{(n)}(W) = d^n U(W)/dW^n$ – стандартная производная целого порядка n по безразмерной переменной *W*, и $U^{(1)}(W) \neq 0$. Определим теперь меру неприятия риска для нелокального случая как безразмерную характеристику.

Определение 2. *Пусть существует однозначная функция полезности U(W), имеющая производные вплоть до третьего порядка по переменной W, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале* [W_0, W_1]. *Тогда мера неприятия риска порядка α на интервале* [W_0, W_1], *для* $W \in$ [W_0, W_1] *определяется формулой*

$$AP_a(W_0, W, \alpha) := -\frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}\cdot\frac{((D^{\alpha}_{W_0+})^2\, U)(W)}{(D^{\alpha}_{W_0+}\, U)(W)}, \quad (4)$$

где $W_0 \leq W \leq W_1$ *и 0 ≤ α ≤ 1, Γ(z) – гамма функция, и* $(D^{\alpha}_{W_0+}\, U)(W) \neq 0$.

Отметим, что коэффициент $C(\alpha) = \frac{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)}$, используемый в формуле (4), равен единице для α = 1, т.е. *C*(1) = 1. Вид данного коэффициента диктуется тем, что подход Пратта [10], используемый для вывода формул мер неприятия риска, использует ряд Тейлора, а коэффициентами обобщенного ряда Тейлора [11] с производными Капуто будут именно $1/\Gamma(\alpha+1)$ и $1/\Gamma(2\alpha+1)$.

Используя формулу $(D^{n}_{a+}f)(x) = f^{(n)}(x)$, получаем, что нелокальная мера неприятия риска (4) для первого порядка α = 1 совпадает с локальной мерой неприятия риска (3), т.е. $AP_a(W, \alpha) = AP_a(W)$. В результате нелокальная мера (4) включает стандартную меру (3) как частный случай.

Функция полезности для постоянной нелокальной меры

Для нахождения функций полезности *U(W)*, для которых локальная мера $AP_a(W)$ постоянна, надо решить обыкновенное дифференциальное уравнение вида $AP_a(W) = A$, где А – постоянный положительный параметр. Известно, что вид функции полезности с постоянной мерой (3) задается выражением

$$U_1(W) = C_1 - C_2 \cdot e^{-AW}. \qquad (5)$$

Найдем общий вид функции полезности U(W), для которой нелокальная мера постоянна. Для простоты будем рассматривать случай $W_0 = 0$. Условие постоянства нелокальной меры имеет вид $AP_a(W_0, W, \alpha)$, где A – некоторая постоянная. Для нахождения вида функции полезности, удовлетворяющей этому условию, нужно решить интегро-дифференциальное уравнение $AP_a(W_0, W, \alpha)$, которое записывается в виде

$$((D^{\alpha}_{W_0+})^2\, U)(W) + \frac{A \cdot \Gamma(2\alpha+1)}{2 \cdot \Gamma(\alpha+1)} (D^{\alpha}_{W_0+}\, U)(W) = 0. \qquad (6)$$

Уравнение (6) относится к классу дифференциальных уравнений с производными нецелого (дробного) порядка [8]. Для случая $0 \le 2\alpha \le 1$ решение уравнения (6) представимо [8, с. 314] в виде

$$U(W) = C \cdot E_{\alpha,1}(\lambda W^{\alpha}) - C \cdot W^{\alpha} \cdot E_{\alpha,\alpha}(\lambda W^{\alpha}), \qquad (7)$$

где $\lambda = -\frac{A \cdot \Gamma(2\alpha+1)}{2 \cdot \Gamma(\alpha+1)}$, а C – некоторая постоянная. Если $1 < 2\alpha \le 2$, то решение уравнения (6) имеет [8, с. 314] вид

$$U(W) = C_1 \cdot E_{\alpha,1}(\lambda W^{\alpha}) - C_1 \cdot W^{\alpha} \cdot E_{\alpha,\alpha}(\lambda W^{\alpha}) + \\ + C_2 \cdot W \cdot E_{\alpha,2}(\lambda W^{\alpha}), \qquad (8)$$

где C_1 и C_2 – постоянные. Здесь $E_{\alpha,\beta}(z)$ – обобщенная функция Миттаг-Леффлера [6, 8, с. 42], определяемая выражением

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \qquad (9)$$

Отметим, что функция Миттаг–Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ является обобщением экспоненциальной функции e^z и для нее выполняется свойство $E_{1,1}(z) = e^z$.

Отметим, что нелокальную меру непринятия риска порядка $\alpha \in [0,1]$, определяемую формулой (4), можно аналитически продолжить по параметру α с единичного интервала [0,1] на положительную полуось $[0, \infty)$.

Нахождение предельной полезности нецелого порядка по нелокальной мере непринятия риска

Известно, что абсолютную меру непринятия риска (4) можно определять как производную первого порядка логарифма предельной полезности *MU(W)* по доходу W с обратным знаком, т.е.

$$AP_a(W) := -\frac{d\ln(MU(W))}{dW}, \qquad (10)$$

где предельная полезность определяется формулой

$$MU(W) := \frac{dU(W)}{dW}. \qquad (11)$$

Формулы (10) и (3) эквивалентны в силу правила дифференцирования сложной функции. Используя фундаментальную теорему математического анализа и формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f_x^{(1)}(x)dx = f(b) - f(a), \qquad (12)$$

можно вычислять значения предельной полезности *MU(W)*, если известны меры непринятия риска $AP_a(W)$. Для таких вычислений применяется формула

$$MU(W) = MU(0) \cdot exp\left\{-\int_0^W AP_a(w)dw\right\}. \qquad (13)$$

Обобщение понятия предельной полезности, позволяющее учитывать нелокальные и эредитарные свойства экономических процессов, было предложено в статье [3, с.112]. Формула предельной полезности порядка $\alpha \ge 0$ имеет вид

$$M_U(W,\alpha) := \left(D^{\alpha}_{W_0+}\, U\right)(W). \qquad (14)$$

Используя это понятие, можно дать новое определение нелокальной меры непринятия риска порядка $\alpha \ge 0$. В результате нелокальную меру можно задавать, как производную порядка $\alpha \ge 0$ логарифма предельной полезности $M_U(W,\alpha)$ порядка $\alpha \ge 0$ по доходу W с коэффициентом, зависящим от параметра α. В результате получаем формулу

$$AP_a(W,\alpha) := -\frac{2 \cdot \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} (D^{\alpha}_{W_0+}\, (\ln M_U(W,\alpha)))(W). \qquad (15)$$

Отметим, что формулы (4) и (15) должны рассматриваться как независимые характеристики непринятия риска для нелокального случая, в силу того, что стандартная формула дифференцирования сложной функции не выполняется для производных нецелого порядка.

Обратной операцией для производной Капуто является интегрирование Римана–

Лиувилля. Приведем определение этого интегрирования [11, с. 69].

Определение 3. *Пусть функция f(x) измерима на интервале (a,b) и выполняется условие . Тогда интеграл Римана–Лиувилля порядка α ≥ 0 по переменной x определяется формулой*

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, \qquad (16)$$

где $\Gamma(\alpha)$ *– гамма функция, a < x < b.*

Интегрирование по Риману–Лиувиллю (16) является обобщением стандартной операции *n*-кратного интегрирования [2, 8, 12]. Отметим, что интеграл Римана–Лиувилля (16) для порядка, равного единице α = 1, имеет вид

$$(I_{a+}^{1}f)(x) \coloneqq \int_a^x f(\xi)d\xi. \qquad (17)$$

Получим формулы, позволяющие находить значения предельных величин $M_U(W,\alpha)$ нецелого порядка для функции полезности, если известны нелокальные меры неприятия риска $AP_a(W,\alpha)$, определяемые формулой (15).

Фундаментальная (основная) теорема теории интегро-дифференцирования нецелого порядка была сформулирована в статье и в монографии второго автора в 2008 г. и 2010 г. соответственно и позже рассмотрена в статье [7]. Обобщение формулы Ньютона-Лейбница на случай производных Капуто и интегралов Римана-Лиувилля:

$$(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f)(W) = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(n)}(a)}{k!}(b-a)^k, \qquad (18)$$

где *n*–1 ≤ α < *n*. Для *α* = 1 формула (18) принимает стандартный вид (12).

В результате, используя обобщенную формулу Ньютона – Лейбница (18) для 0 ≤ α ≤ 1, мы получаем искомое уравнение

$$M_U(W,\alpha) = M_U(0,\alpha)\cdot\exp\left\{-\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{2\cdot\Gamma(\alpha+1)}\cdot\left(I_{0+}^{\alpha}(AP_a(w,\alpha))\right)(W)\right\}, \qquad (19)$$

где *0 ≤* α *<* 1, и мы использовали W_0=0. Уравнение (19) позволяет находить значения предельных величин $M_U(W,\alpha)$ нецелого порядка α > 0 для функции полезности *U(W),* если известна нелокальная мера неприятия риска $AP_a(W,\alpha)$. Для применения формулы (19) следует использовать интегралы Римана–Лиувилля порядка α ≥ 0 для степенной функции [8, с. 71], $I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}(x-a)^{\beta+\alpha}$, где *β* > 0 или другие табличные интегралы произвольного (нецелого) порядка, приведенные в работе [2, с. 140–141].

Отметим, что используя понятие эластичности нецелого порядка, предложенное в [14], можно определить третий тип нелокальных мер непринятия риска, отличный от (4) и (15). Эти нелокальные меры будут определяться как эластичности порядка α по доходу для предельной полезности (14).

Для описания поведения потребителей и их отношения к риску в общем случае следует учитывать зависимость поведения потребителей от изменения функции полезности на конечном интервале значений дохода (или объема потребления), а не только в бесконечно малой окрестности рассматриваемой величины дохода. Использование стандартных мер непринятия риска, определяемых через производные целого порядка, базируется на предположении о локальности, поскольку эти производные определяются свойствами функции полезности лишь в бесконечно малой окрестности рассматриваемого значения дохода. В данной работе предлагается метод построения нелокальных мер непринятия риска, базирующийся на применении производных произвольного (целого и нецелого) порядков. Эти нелокальные меры позволяют учитывать изменения функции полезности на конечном интервале изменений величины дохода (или объема потребления). Стандартные меры непринятия риска являются частными случаями предлагаемых нелокальных мер порядка α, когда этот порядок равен единице. Предлагаемые меры непринятия риска позволят более адекватно описывать экономические процессы за счет учета свойств функции полезности на конечном интервале изменений дохода.

Библиографический список

1. *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике. 5-е изд. М., 2009.

2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск, 1987.

3. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования. 2016. № 7 (109). С. 108–113.

4. *Черемных Ю.Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень. М., 2008.

5. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of

Caputo Type. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

6. *Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.* Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014.

7. *Grigoletto E.C., De Oliveira E.C.* Fractional versions of the fundamental theorem of calculus // Applied Mathematics. 2013. Vol. 4. P. 23–33.

8. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

9. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998.

10. Pratt J. W. Risk aversion in the small and in the large // Econometrica. 1964. Vol. 32. № 1-2. P. 122–136.

11. *Odibat Z.M., Shawagfeh N.T.* Generalized Taylor's formula // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 186. № 1. P. 286–293.

12. *Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach, 1993.

13. *Skovranek T., Podlubny I., Petras I.* Modeling of the national economies in state-space: A fractional calculus approach // Economic Modelling. 2012. Vol. 29. № 4. P. 1322–1327.

14. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Elasticity for economic processes with memory: Fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus. 2016. Vol. 6. № 2. P. 219–232.

15. *Tenreiro Machado J.A., Mata M.E.* A fractional perspective to the bond graph modelling of world economies. // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol.80. № 4. P. 1839–1852.

16. *Tenreiro Machado J.A., Mata M.E.* Pseudo phase plane and fractional calculus modeling of western global economic downturn. // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. Vol.22. № 1–3. P. 396–406.

17. *Tenreiro Machado J.A. Mata M.E., Lopes A.M.* Fractional state space analysis of economic systems. // Entropy. 2015. Vol.17. № 8. P. 5402–5421.